

**EX.1** Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$U_0 = 0 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n - \frac{2}{3}$$

1°/ Calculer  $U_1$  et  $U_2$ .

2°/ Posons :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n = -\frac{4}{3} - U_n$

2°-a) Vérifier que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique de raison  $q = \frac{1}{2}$ .

2°-b)  $M_q$  :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = -\frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

2°-c) En déduire  $U_n$  en fonction de  $n$  et calculer  $\lim U_n$ .

**EX.2** Soit  $f$  la fonction définie par l'expression :

$$f(x) = \frac{2x\sqrt{x} - \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$$

1°/ Déterminer  $D$  le domaine de définition de  $f$ .

2°/ Vérifier que :  $(\forall x \in D) ; f(x) = 2x - 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$

3°/ Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et donner une interprétation géométrique du résultat.

4°/ Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 1)]$  ; en déduire que la droite  $(\Delta) : y = 2x - 1$  est asymptote oblique à  $(\mathcal{C}_f)$  au voisinage de  $(+\infty)$ .

5°/ Étudier la position de  $(\mathcal{C}_f)$  par rapport à  $(\Delta)$

6°/ Calculer  $f(1)$  et construire  $(\mathcal{C}_f)$

— \* fin \* —



## Correction du modèle n°2 du DS n°2

EXERCICE 1 :  $u_0 = 0$  et  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{2}{3}$ 

$$1^\circ \quad u_1 = \frac{1}{2}u_0 - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \times 0 - \frac{2}{3} = 0 - \frac{2}{3} = \boxed{-\frac{2}{3}}$$

$$u_2 = \frac{1}{2}u_1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{3}{3} = \boxed{-1}$$

$$2^\circ \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n = -\frac{4}{3} - u_n$$

$$2^\circ - a) \quad \text{Soit } n \in \mathbb{N} : v_{n+1} = -\frac{4}{3} - u_{n+1} = -\frac{4}{3} - \left(\frac{1}{2}u_n - \frac{2}{3}\right)$$

$$= -\frac{4}{3} - \frac{1}{2}u_n + \frac{2}{3} = -\frac{4}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2}u_n$$

$$= \frac{-4+2}{3} - \frac{1}{2}u_n = -\frac{2}{3} - \frac{1}{2}u_n = \frac{2}{2} \times -\frac{2}{3} - \frac{1}{2}u_n$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{2(-2)}{3} - u_n \right) = \frac{1}{2} \left( \underbrace{-\frac{4}{3} - u_n}_{v_n} \right) = \frac{1}{2} v_n$$

donc la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison  $q = \frac{1}{2}$ .

$$2^\circ - b) \quad \text{Comme } (v_n) \text{ est géométrique de raison } q = \frac{1}{2}$$

$$\text{alors : } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n = q^n v_0$$

$$\text{avec : } v_0 = -\frac{4}{3} - u_0 \quad \left( \text{car } v_n = -\frac{4}{3} - u_n \right)$$

$$= -\frac{4}{3} - 0 = \boxed{-\frac{4}{3}}$$

$$\text{donc : } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(-\frac{4}{3}\right) = \boxed{-\frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$2^\circ - c) \quad \underline{u_n \text{ en fonction de } n :}$$

$$\text{on sait que : } \forall n \in \mathbb{N} ; v_n = -\frac{4}{3} - u_n$$

$$\text{donc : } u_n = -v_n - \frac{4}{3}$$

$$= -\left(-\frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) - \frac{4}{3}$$



$$\text{cà-d : } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{3}$$

(2)

$$* \lim u_n :$$

$$\text{on a : } -1 < \frac{1}{2} < 1 \quad \text{donc : } \lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

$$\begin{aligned} \text{donc : } \lim u_n &= \lim \frac{4}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{3} \\ &= \frac{4}{3} \times 0 - \frac{4}{3} = \boxed{-\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

### EXERCICE 2

$$f(x) = \frac{2x\sqrt{x} - \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad D &= \{x \in \mathbb{R} ; x \geq 0 \text{ et } \sqrt{x} \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} ; x \geq 0 \text{ et } x \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} ; x > 0\} \\ &= ]0 ; +\infty[ \end{aligned}$$

$$2^\circ \quad \text{Soit } x \in D \text{ on a :}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x\sqrt{x} - \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} = \frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= 2x - 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3^\circ \quad \text{on a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x\sqrt{x} - \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x\sqrt{x} - \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\sqrt{x}} = \boxed{-\infty} \end{aligned}$$

interprétation :  $(\mathcal{C}_f)$  admet une asymptote verticale d'équation :  $x = 0$ .

$$\begin{aligned} 4^\circ \quad \text{on a : } f(x) - (2x - 1) &= \left(2x - 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) - (2x - 1) \\ &= 2x - 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} - 2x + 1 = -\frac{1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$  (3)

Déduction : La droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = 2x - 1$  est asymptote oblique à  $(\mathcal{C}_f)$  au voisinage de  $(+\infty)$ .

5°/ Position (relative) de  $(\mathcal{C}_f)$  par rapport à  $(\Delta)$  :

Le signe de  $(f(x) - y)$ .

on a :  $f(x) - y = -\frac{1}{\sqrt{x}} < 0$  pour tout  $x \in D$

donc  $(\mathcal{C}_f)$  est au dessus (تحت) de la droite  $(\Delta)$ . (sur  $D$ ).

6°/  $f(1) = \frac{2 - 1 - 1}{1} = \frac{2 - 2}{1} = 0$

Construction de  $(\mathcal{C}_f)$  :

